「非拡大写像が不動点を持つこと」対「非拡大半群が共通不動点を持つこと」 (非線形解析学と凸解析学の研究)

鈴木, 智成

数理解析研究所講究録
第1643巻 2009年 103-111

「非拡大写像が不動点を持つこと」対「非拡大半群が共通不動点を持つこと」

九州工業大学 鈴木 智成 (Tomonari SUZUKI)

1. 序

2003年以降, 筆者は非拡大半群の不動点に関する論文を書いてきた [16–26, 28–36]. 2003年というのは論文 [16] が出版された年であるが, この論文を投稿したのは2000年4月である. さらに, この論文の結果を京都大学数理解析研究所の研究集会で講演したのは1998年8月であるから, 筆者は少なく見積もっても10年の間, 非拡大半群の研究をしていることになる. 非拡大半群のパラメータである実数に魅了されて, とても楽しく研究させてもらうことができたが, 論文 [26, 34] により, その研究もそろそろ収束しそうである. 本稿では, その論文 [26, 34] の解説を — 主観などを交えながら — 書きたいと思っている.

2. 準備

本稿で必要になる定義をいくつか述べる. なお, ここに記述されていない定義については, [37, 39] 等を参照のこと.

定義 1. Banach 空間 E の閉凸集合 C 上で定義された写像 T が**非拡大写像** (nonexpansive mapping) であるとは, $\|Tx-Ty\| \leq \|x-y\|$ がすべての $x, y \in C$ に対して成り立つことである.

非拡大写像に関する様々な不動点存在定理が証明されている. [1, 2, 4, 5, 9–11, 13, 14] 等. 例えば, 2006年の論文 [9] では, 「E が uniformly nonsquare で C が有界」という条件の下での存在定理が証明されている.

定義 2. $\{S(t) : t \geq 0\}$ を C 上で定義された写像族とする. 以下の3条件を満たすとき, $\{S(t) : t \geq 0\}$ は**非拡大半群** (nonexpansive semigroup) と呼ばれる.

(NS1) すべての $t \geq 0$ について, $S(t)$ は非拡大写像である.

(NS2) すべての $s, t \geq 0$ について, $S(s+t) = S(s) \circ S(t)$ が成立する.

MSC (2000). 47H20, 47H10.
キーワード. 非拡大半群, 非拡大写像, 不動点.
住所. 〒804–8550 北九州市戸畑区 九州工業大学数学教室.
電子メール. suzuki-t@mns.kyutech.ac.jp.

(NS3) すべての $x \in C$ について, $[0, \infty)$ から C への写像 $t \mapsto S(t)x$ が連続である.

筆者の論文では通常このように定義をするが, 多くの文献では, 次の (NS0) も仮定している. なお, 本稿で述べる定理は, (NS0) を仮定してもしなくても, 成立する.

(NS0) $S(0)$ は C 上で定義された恒等写像である.

定義 3. 集合 C が**非拡大写像に関する FPP** (fixed point property for nonexpansive mappings) を持つとは, C 上で定義されたすべての非拡大写像が不動点を持つことである.

FPP は, 本来, このように定義されるべきものである. しかし, 非拡大写像に関してはこれよりも強い条件を FPP ということが非常に多い. なお, 非拡大半群に関する FPP も同様に定義できる.

定義 4. 集合 C が**非拡大半群に関する FPP** (fixed point property for nonexpansive semigroups) を持つとは, C 上で定義されたすべての非拡大半群が共通不動点を持つことである.

3. 非拡大半群の不動点定理

主結果について述べる前に, 非拡大半群に関する不動点定理の歴史について述べる. とは言うものの, 実は, 非拡大半群に関する不動点定理の歴史は「存在しない」. なぜなら, 非拡大半群に関する不動点定理は [26] で証明されているもの (本稿の定理 5) 唯一つしかなく, しかも, 改良することが不可能なことまで証明されているからである. (もちろん, C が凸であるという仮定や, E が Banach 空間であるという仮定を弱めることができれば改良になるが...)

もちろん歴史が「存在しない」というのは冗談で, 実際には歴史は存在する. すなわち, 非拡大半群限定の共通不動点の存在定理は唯一つしかないが, 「可換かつ無限個の写像族」というずっと一般的な写像族の不動点定理に関する歴史は存在する. 実際, 非拡大半群が可換な写像族であることは

$$S(s) \circ S(t) = S(s+t) = S(t+s) = S(t) \circ S(s)$$

と, 簡単に証明できる. 可換かつ無限個の写像族の不動点定理は, 筆者の知る限り, 5 つの論文 [3, 5, 6, 8, 15] で証明されている. つまり, 非拡大半群に関する不動点定理は 6 つの論文で証明されている, と言うことができる. それぞれの定理における仮定は, E が Banach 空間であり C が閉凸集合であるという条件を除くと以下のように書ける.

(i) C がコンパクト (DeMarr [8] 1963)
(ii) E が一様凸で, C が有界 (Browder [5] 1965)
(iii) C が弱コンパクトで complete normal structure を持つ (Belluce & Kirk [3] 1967)
(iv) C が弱コンパクトで正規構造を持つ (Lim [15] 1974)
(v) C が弱コンパクトもしくは有界かつ可分で, 非拡大写像に関する FPP と conditional FPP を持つ (Bruck [6] 1974)
(vi) C が非拡大写像に関する FPP を持つ (Suzuki [26] 2006)

さて, 32 年ぶりに改良された最後の不動点定理を述べる.

定理 5 ([26]). C を Banach 空間 E の閉凸集合とする. $\{S(t) : t \geq 0\}$ を C 上で定義された非拡大半群とする. C が非拡大写像に関する FPP を持つと仮定する. このとき, $\{S(t) : t \geq 0\}$ は共通不動点を持つ.

この定理の証明に際して, 以下の補助定理が重要な役割を果たしている.

補助定理 6 ([26]). $0 < \alpha < \beta$, $0 \leq \tau \leq \beta$ そして α/β が無理数となるような実数 α, β, τ をとる. $[0,\beta]$ の部分集合列 $\{A_n\}$ を $A_1 = \{\tau\}$ と

$$A_{n+1} = \bigcup_{t \in A_n} \{\, |\alpha - t|,\ |\beta - t| \,\}$$

で定める. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおく. このとき, A の閉包は $[0,\beta]$ である.

定理 5 の証明. まず,

$$\begin{aligned}
&\|S(\alpha)x - S(\beta)x\| \\
&= \big\|S\big(\max\{\alpha,\beta\}\big)x - S\big(\min\{\alpha,\beta\}\big)x\big\| \\
&= \big\|S\big(\min\{\alpha,\beta\} + |\alpha-\beta|\big)x - S\big(\min\{\alpha,\beta\}\big)x\big\| \\
&= \big\|S\big(\min\{\alpha,\beta\}\big) \circ S\big(|\alpha-\beta|\big)x - S\big(\min\{\alpha,\beta\}\big)x\big\| \\
&\leq \big\|S\big(|\alpha-\beta|\big)x - x\big\|
\end{aligned}$$

が成り立つことに注意する. C 上の非拡大写像 T を

$$Tx = \frac{1}{3}S(1)x + \frac{2}{3}S(\pi)x$$

と定義する. 仮定より, T は不動点 $z \in C$ を持つ. すなわち, z は

$$z = \frac{1}{3}S(1)z + \frac{2}{3}S(\pi)z$$

を満たす. 明らかに

(1) $$\|S(1)z - z\| = 2\,\|S(\pi)z - z\|$$

が成り立つ．

$$M = \max\left\{\|S(t)z - z\| : \ t \in [0,\pi]\right\}$$
$$A = \left\{t \in [0,\pi] : \ \|S(t)z - z\| = M\right\}$$

とおく．$t \in A$ のとき，

$$\begin{aligned} M &= \|S(t)z - z\| \\ &\le \frac{1}{3}\|S(t)z - S(1)z\| + \frac{2}{3}\|S(t)z - S(\pi)z\| \\ &\le \frac{1}{3}\|S(|1-t|)z - z\| + \frac{2}{3}\|S(|\pi - t|)z - z\| \\ &\le M \end{aligned}$$

よって，

$$\|S(|1-t|)z - z\| = \|S(|\pi - t|)z - z\| = M$$

すなわち，$|1-t|,\ |\pi - t| \in A$ が成り立つ．従って

$$t \in A \quad \Longrightarrow \quad |1-t|,\ |\pi - t| \in A$$

を示すことができた．補助定理6より，A の閉包は $[0,\pi]$ である．連続性 (NS3) より，A は閉集合であるから，$A = [0,\pi]$ を得る．$1,\ \pi \in A$ であるから，

$$\|S(1)z - z\| = \|S(\pi)z - z\| = M \tag{2}$$

を得る．(1) と (2) より $M = 2M$ が成り立つ．この簡単な方程式を解くと，$M = 0$ を得る．よって，$S(t)z = z$ がすべての $t \in [0,\pi]$ で成り立つ．半群性 (NS2) より，すべての $t \ge 0$ で $S(t)z = z$ が成り立つ．つまり，z は $\{S(t) : t \ge 0\}$ の共通不動点である． □

定理5については，解説論文 [27] で少し触れた．「筆者の頭だけでは問題の本質が何か全く分からず手探りの状態であったが，コンピュータによる数値実験をして，問題の本質を把握できたことが決め手になった.」実は，証明を見てもらえば分かるが，問題の本質は補助定理6にある．論文 [21, 26] は同じ年に出版されたが，投稿日は17ヶ月ほど差がある．論文 [21] を投稿する前にも，補助定理6に挑戦したが，数値実験の結果を見て証明する気を失くしたという経緯がある．今思うと，筆者のつくったコンピュータプログラムにバグがあったのかも知れない．そして，17ヶ月後に似たような数値実験をして，今度は証明する気になり，実際に証明することができた．

4. 逆

定理5の逆を証明する．すなわち，次の定理を証明する．

定理 7 ([34]). C を Banach 空間 E の閉凸集合とする．T を C 上で定義された非拡大写像とする．C が非拡大半群に関する FPP を持つと仮定する．このとき，T は不動点を持つ．

証明に際しては Crandall & Liggett [7] の定理を必要とする．以下の補助定理は Crandall & Liggett の定理から直ちに導かれる．

補助定理 8 (Crandall & Liggett [7]). C 上の写像 J_t と $S(t)$ $(t \geq 0)$ を

$$J_t x = \frac{1}{1+t} x + \frac{t}{1+t} T J_t x, \qquad S(t)x = \lim_{n\to\infty} {J_{t/n}}^n x$$

で定義する．J_t が定義できることは Banach の縮小原理が保証している．このとき，以下が成り立つ．

(i) すべての $x \in C$ と $t \in [0,\infty)$ に対して，点列 $\{{J_{t/n}}^n x\}$ は収束する．しかも，t に関しては広義一様収束する．

(ii) $\{S(t) : t \geq 0\}$ は C 上の非拡大半群である．

定理 7 の証明． 非拡大半群 $\{S(t) : t \geq 0\}$ を補助定理8によって定義する．仮定により，$\{S(t) : t \geq 0\}$ は共通不動点 $z \in C$ を持つ．$\varepsilon > 0$ を任意に固定する．広義一様収束性により，$\nu \in \mathbb{N}$ が存在して，$t \in [1,2]$ と $n \geq \nu$ に対して

$$\|z - {J_{t/n}}^n z\| = \|S(t)z - {J_{t/n}}^n z\| < \varepsilon$$

が成り立つ．特に，$n \geq \nu$ と $n \leq k \leq 2n$ を満たす自然数 k と n に対して

$$\|z - {J_{1/n}}^k z\| < \varepsilon$$

が成り立つ．$n \geq \nu$ のとき，

$$\begin{aligned}
&\|Tz - {J_{1/n}}^{2n} z\| \\
&= \left\| Tz - \frac{1}{1+1/n} {J_{1/n}}^{2n-1} z - \frac{1/n}{1+1/n} T {J_{1/n}}^{2n} z \right\| \\
&\leq \frac{1}{1+1/n} \|Tz - {J_{1/n}}^{2n-1} z\| + \frac{1/n}{1+1/n} \|Tz - T{J_{1/n}}^{2n} z\| \\
&\leq \frac{1}{1+1/n} \|Tz - {J_{1/n}}^{2n-1} z\| + \frac{1/n}{1+1/n} \|z - {J_{1/n}}^{2n} z\| \\
&\leq \frac{1}{1+1/n} \|Tz - {J_{1/n}}^{2n-1} z\| + \left(1 - \frac{1}{1+1/n}\right) \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ. この計算を繰り返して

$$
\begin{aligned}
&\|Tz - {J_{1/n}}^{2n}z\| \\
&\leq \frac{1}{1+1/n}\,\|Tz - {J_{1/n}}^{2n-1}z\| + \left(1 - \frac{1}{1+1/n}\right)\varepsilon \\
&\leq \frac{1}{(1+1/n)^2}\,\|Tz - {J_{1/n}}^{2n-2}z\| + \left(1 - \frac{1}{(1+1/n)^2}\right)\varepsilon \\
&\leq \frac{1}{(1+1/n)^3}\,\|Tz - {J_{1/n}}^{2n-3}z\| + \left(1 - \frac{1}{(1+1/n)^3}\right)\varepsilon \\
&\leq \frac{1}{(1+1/n)^4}\,\|Tz - {J_{1/n}}^{2n-4}z\| + \left(1 - \frac{1}{(1+1/n)^4}\right)\varepsilon \\
&\vdots \\
&\leq \frac{1}{(1+1/n)^n}\,\|Tz - {J_{1/n}}^{n}z\| + \left(1 - \frac{1}{(1+1/n)^n}\right)\varepsilon
\end{aligned}
$$

すなわち,

$$
\begin{aligned}
&\|Tz - {J_{2/(2n)}}^{2n}z\| \\
&= \|Tz - {J_{1/n}}^{2n}z\| \\
&\leq \frac{1}{(1+1/n)^n}\,\|Tz - {J_{1/n}}^{n}z\| + \left(1 - \frac{1}{(1+1/n)^n}\right)\varepsilon
\end{aligned}
$$

を得る. $n \to \infty$ とすると, $\lim_n(1+1/n)^n = \exp(1)$ であるから,

$$
\begin{aligned}
\|Tz - z\| &= \|Tz - S(2)z\| \\
&\leq \exp(-1)\,\|Tz - S(1)z\| + \bigl(1 - \exp(-1)\bigr)\varepsilon \\
&= \exp(-1)\,\|Tz - z\| + \bigl(1 - \exp(-1)\bigr)\varepsilon
\end{aligned}
$$

を得る. $\varepsilon > 0$ は任意なので,

$$
\|Tz - z\| \leq \exp(-1)\,\|Tz - z\|
$$

が言える. $0 < \exp(-1) < 1$ より, $Tz = z$, すなわち z は T の不動点であることが言えた. □

高校で習った $\lim_n(1+1/n)^n = \exp(1)$ が出てきて, とても嬉しかったのを現在も覚えている.

定理 5 と定理 7 により, 以下を得る.

定理 9 ([34]). C を Banach 空間 E の閉凸集合とする. 以下は同値である.

(i) C が非拡大写像に関する FPP を持つ.

(ii) C が非拡大半群に関する FPP を持つ.

(i) は一つの写像の不動点の存在に関する条件であり, (ii) は無限個の写像族に共通不動点に関する条件である. 単純に考えると, (ii) のが (i) より, はるかに強い条件のように思える. (定理5を最後の不動点定理と呼ぶ根拠はこの直感にある.) なのに, なぜ同値になるのか, 筆者にもよく分かっていない. 想像するに... 非拡大半群のバリエーションは非拡大写像のバリエーションよりもかなり少ないのではないか, と考えている. 繰り返しになるが, 筆者にもよく分かっていない.

参考文献

[1] J. B. Baillon, *Quelques aspects de la théorie des points fixes dans les espaces de Banach. I, II.* (in French), Séminaire d'Analyse Fonctionnelle (1978–1979), Exp. No. 7-8, 45 pp., École Polytech., Palaiseau, 1979. MR0557363

[2] J. B. Baillon and R. Schöneberg, *Asymptotic normal structure and fixed points of nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., **81** (1981), 257–264. MR0593469

[3] L. P. Belluce and W. A. Kirk, *Nonexpansive mappings and fixed-points in Banach spaces*, Illinois J. Math, **11** (1967), 474–479. MR0215145

[4] F. E. Browder, *Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **53** (1965), 1272–1276. MR0178324

[5] ———, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **54** (1965), 1041–1044. MR0187120

[6] R. E. Bruck, *A common fixed point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., **53** (1974), 59–71. MR0361945

[7] M. G. Crandall and T. M. Liggett, *Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces*, Amer. J. Math., **93** (1971), 265–298. MR0287357

[8] R. DeMarr, *Common fixed points for commuting contraction mappings*, Pacific J. Math., **13** (1963), 1139–1141. MR0159229

[9] J. García Falset, E. Llorens Fuster and E. M. Mazcuñán Navarro, *Uniformly nonsquare Banach spaces have the fixed point property for nonexpansive mappings*, J. Funct. Anal., **233** (2006), 494–514. MR2214585

[10] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 28, Cambridge University Press (1990). MR1074005

[11] D. Göhde, *Zum Prinzip def kontraktiven Abbildung*, Math. Nachr., **30** (1965), 251–258. MR0190718

[12] G. H. Hardy and E. M. Wright, *"An introduction to the theory of numbers"*, Fifth edition, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979. MR0568909

[13] M. Kato and T. Tamura, *Weak nearly uniform smoothness and worth property of ψ-direct sums of Banach spaces*, Comment. Math. Prace Mat., **46** (2006), 113–129. MR2283075

[14] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly, **72** (1965), 1004–1006. MR0189009

[15] T. C. Lim, *A fixed point theorem for families on nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., **53** (1974), 487–493. MR0365250

[16] T. Suzuki, *On strong convergence to common fixed points of nonexpansive semigroups in Hilbert spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **131** (2003), 2133–2136. MR1963759

[17] ______, *Some remarks on the set of common fixed points of one-parameter semigroups of nonexpansive mappings in Banach spaces with the Opial property*, Nonlinear Anal., **58** (2004), 441–458. MR2073537

[18] ______, *An example for a one-parameter nonexpansive semigroup*, Abstr. Appl. Anal., **2005** (2005), 173–183. MR2179441

[19] ______, *Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals*, J. Math. Anal. Appl., **305** (2005), 227–239. MR2128124

[20] ______, *The set of common fixed points of an n-parameter continuous semigroup of mappings*, Nonlinear Anal., **63** (2005), 1180–1190. MR2211589

[21] ______, *The set of common fixed points of a one-parameter continuous semigroup of mappings is $F(T(1)) \cap F(T(\sqrt{2}))$*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), 673–681. MR 2180883

[22] ______, *The set of common fixed points of a one-parameter continuous semigroup of nonexpansive mappings is $F\big(\frac{1}{2}T(1) + \frac{1}{2}T(\sqrt{2})\big)$ in strictly convex Banach spaces*, Taiwanese J. Math., **10** (2006), 381–397. MR2208273

[23] ______, *Common fixed points of one-parameter nonexpansive semigroups in strictly convex Banach spaces*, Abstr. Appl. Anal., **2006** (2006), Article ID 58684, 1–10. MR2 211674

[24] ______, *Some notes on one and n-parameter nonexpansive semigroups*, Bull. Kyushu Inst. Technol., **53** (2006), 25–33. MR2237620

[25] ______, *Characterizations of common fixed points of one-parameter nonexpansive semigroups, and convergence theorems to common fixed points*, J. Math. Anal. Appl., **324** (2006), 1006–1019. MR2265097

[26] ______, *Common fixed points of one-parameter nonexpansive semigroups*, Bull. London Math. Soc., **38** (2006), 1009–1018. MR2285255

[27] ______, 非拡大半群の共通不動点集合, in The Structure of Banach Spaces and Function Spaces (K.-S. Saito Ed.), RIMS Kokyuroku, 1520 (2006), pp 70–77.

[28] ______, *Browder's type convergence theorems for one-parameter semigroups of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, in Proceedings of the Fourth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka Eds.), pp. 599–607, Yokohama Publishers, 2007. MR2298743

[29] ______, *Browder's type convergence theorems for one-parameter semigroups of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Israel J. Math., **157** (2007), 239–257. MR2342 448

[30] ______, *Some notes on Bauschke's condition*, Nonlinear Anal., **67** (2007), 2224–2231. MR2331873

[31] ______, *Some comments about recent results on one-parameter nonexpansive semigroups*, Bull. Kyushu Inst. Technol., **54** (2007), 13–26. MR2371765

[32] ———, *Some notes on common fixed points of one-parameter nonexpansive semigroups*, in Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces II (M. Kato and L. Maligranda Eds.), pp. 431–436, Yokohama Publishers, 2008.

[33] ———, *Mosco convergence of the sets of fixed points for one-parameter nonexpansive semigroups*, Nonlinear Anal., **68** (2008), 3870–3878. MR2416091

[34] ———, *Fixed point property for nonexpansive mappings versus that for nonexpansive semigroups*, Nonlinear Anal. (2008), doi:10.1016/j.na.2008.05.003.

[35] T. Suzuki and W. Takahashi, *Strong convergence of Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups in general Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **5** (2004), 209–216. MR2083912

[36] ———, *Fixed point theorem and strong convergence theorem for one-parameter nonexpansive semigroups in general Banach spaces*, in Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces (M. Kato and L. Maligranda Eds.), pp. 345–357, Yokohama Publishers, 2004. MR2146938

[37] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000. MR1864294

[38] 高村幸男 and 小西芳雄, 非線形発展方程式, 岩波書店 (1977).

[39] 高橋渉, 非線形関数解析学, 近代科学社 (1988).

[40] 宮寺功, 非線形半群, 紀伊国屋書店 (1977).